Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. Wim de Boer
Institut für Experimentelle Kernphysik Dr. Jörg R. Hörandel

Übungen zur Einführung in die Kosmologie
8. Aufgabenblatt

1. Die Friedmanngleichung für die Expansionsrate des Universums ist gegeben durch

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{8\pi G\rho(t)}{3H_0^2} + \frac{1}{a(t)^2R(t)^2H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}\right) \quad .$$

Aus den Messungen des WMAP Experimentes ergeben sich die Werte

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho(t_0)}{3H_0^2} = 0.29\pm0.07, \quad \Omega_R = \frac{1}{a(t_0)^2R^2H_0^2} = 0, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} = 0.71\pm0.07$$

und $H_0 = 72 \pm 5$ km/(s Mpc).

Falls es wirklich Materie in Form „dunkler Energie“ gibt, die durch die besondere Zustandsgleichung $p = -\rho_\Lambda c^2$ beschrieben wird, dann sollten wir den Term mit der kosmologischen Konstanten in der Friedmanngleichung so schreiben, wie den Massenterm. D.h. wir schreiben

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3H_0^2}.$$

a) Berechnen sie die gegenwärtige Energiedichte $\rho_\Lambda c^2$. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit [eV] an (1 eV=$1.6\cdot10^{-19}$ J). Vergleichen Sie diese mit der Energiedichte der dunklen Materie ($\rho_{Halo}c^2 = 0.3$ GeV/cm^3) in unserer Galaxie.

b) Berechnen Sie den negativen Druck der durch die kosmologische Konstante verursacht wird. Was wäre die Kraft auf die Wände eines Würfels mit einer Kantenlänge von 1 m?

c) Beachten Sie daß die Energiedichte durch die kosmologische Konstanten zeitunabhängig ist, weil der Term mit der kosmologischen Konstante in der Friedmanngleichung nicht von der Rotverschiebung abhängt. Wieviel Energie wird benötigt, um das Volumen eines Würfels mit einer Kantenlänge von einem Gpc im gegenwärtigen Universums zu verdoppeln? Vergleichen Sie diese Größe mit dem gegenwärtigen Energieinhalt von 1 Gpc^3 dunkler Materie im Universum.

2. Was sind das Horizontproblem, das Flachheitsproblem und das Monopolproblem?

   Wie werden die Probleme durch das Inflationsmodell gelöst?

   Erklären Sie in Stichworten.

3. Berechnen Sie die minimale Größe des Universums nach der Inflation ($T_{GUT} = 10^{28}$ K) und zum Zeitpunkt t_r der Rekombination ($T_r = 3000$ K). Wie groß war die Materiedichte des Universums zum Zeitpunkt t_r? Schätzen Sie die mittlere freie Weglänge der Photonen zu diesem Zeitpunkt ab.

   Hinweise:
   Der Thomson-Wirkungsquerschnitt beträgt $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 = 0.665$ barn, die heutige kritische Dichte $\rho_c = 5390$ eV/cm^3, $\Omega_M = 0.27$ und $S_0 = 3ct_0 = 10^{28}$ cm. Für die Elektronmasse gilt $m_e = 511$ keV/c^2.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 23. Juni 2004 um 14:00 im Seminarraum 3/1 besprochen.
Informationen zu den Übungen unter http://www-ik.fzk.de/~joerg/uebungen.html.