Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Experimentelle Kernphysik

Prof. Dr. Wim de Boer
Dr. Jörg R. Hörandel

Übungen zur Einführung in die Kosmologie
12. Aufgabenblatt

1. Virialsatz
   Der Virialsatz gilt für stabile mechanische Systeme. Ein solches System bestehe aus Massen m_k an den Orten r_k mit den Impulsen p_k, mit $k = 1, 2, 3, ...$ Die Einzelgrößen können sich als Funktion der Zeit ändern, nicht aber ihr zeitliches Mittel und es gilt
   $$\frac{d}{dt}\overline{\sum p_k \cdot r_k} = 0 \quad .$$
   Nehmen Sie für die Kraft zwischen zwei Massen k und j den Zusammenhang
   $$F_{kj} = a_{kj}(r_k - r_j)^{-n}$$
   an und leiten Sie hieraus den Virialsatz
   $$W_{kin} = -\frac{n-1}{2}W_{pot}$$
   ab.

2. Anwendung des Virialsatzes
   Leiten Sie unter Verwendung des Virialsatzes den Zusammenhang
   $$M = \frac{2Rv^2}{G}$$
   her. Diese Gleichung wird dazu benutzt um aus der beobachteten Bewegung von Galaxien in einem Galaxienhaufen die Gesamtmasse abzuschätzen. Im Mittel ist das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit v^2 von Galaxien in sphärischen Galaxienhaufen 3 mal größer als V^2. V ist die mittlere scheinbare Verschiebungsgeschwindigkeit einer Galaxie relativ zum Zentrum des Haufens. Berechnen sie die Gesamtmasse M für $V = 1000$ km/s sowie $R = 1$ Mpc und geben Sie das Ergebnis in Vielfachen der Sonnenmasse an.

bitte wenden

3. Rotationskurven von Galaxien

   Der Zusammenhang zwischen der Rotationsgeschwindidkeit $v(r)$ auf einer Bahn mit Radius r um das Zentrum der Galaxie und der Masse $M(r)$, die sich innerhalb des Radius r befindet, ist gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad .$$

   Geben Sie einen Ausdruck für $\rho(r)$ an, um $v(r) = const.$ zu erhalten.

   Nehmen Sie an, eine Galaxie hätte eine flache Rotationskurve bis zum Radius R_{max} und es sei $v = 220$ km/s. Weiterhin ist die Dichte der Galaxien gegeben durch $n = 0.01\ h^3/\mathrm{Mpc}$. Zeigen Sie, daß $\Omega = 1$ wird, falls R_{max} auf $2.5\ h^{-1}$ Mpc ansteigt. Dieser Wert etnspricht typischen intergalaktischen Entfernungen.

4. Entartungsdruck

   In einem Fermigas der Temperatur T lassen sich die Teilchen für $T \ll T_{ent}$ durch die Boltzmann–Statistik und für $T \gg T_{ent}$ durch die Fermi–Statistik beschreiben. T_{ent} ist die Entartungstemperatur $T_{ent} = F/k$ mit der Fermienergie F. Gehen Sie von einem Gas der Dichte $n = N/V$ aus. Zwei Teilchen mit entgegengesetztem Spin benötigen im Impulsraum das Volumen h^3/V, dies folgt aus dem Pauliprinzip. Berechnen Sie die Entartungstemperatur T_{ent}. Zeigen Sie, daß die Gesamtenergie eines Fermigases gegeben ist durch

$$W = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{N^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} h^2}{m} \quad .$$

   Leiten Sie hieraus die Gleichung für den Entartungsdruck

$$p_{ent} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{N^{\frac{5}{3}} h^2}{m} V^{-\frac{5}{3}}$$

   her.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 23. Januar 2002 um 14:30 im Seminarraum 9/1 besprochen.
Informationen zu den Übungen: http://www-ik.fzk.de/~joerg/kosmologie.html.