Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Experimentelle Kernphysik

Priv. Doz. Dr. J. Hörandel
Dr. M. Roth

Übungen zur Einführung in die Astroteilchenphysik — WS 2005/06
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 9 Leaky Box Modell

Die Ausbreitung der kosmischen Strahlung kann durch folgende Transportgleichung beschrieben werden:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D\nabla^2 N_i + \frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)N_i\right] + Q_i - \frac{N_i}{\tau_{spal}(i)} - \frac{N_i}{\tau_r(i)} + \sum_{j>i} \frac{p_{ij}}{\tau_j} N_j \quad .$$

Erläutern Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme.

Im „Leaky Box Modell“ wird der Diffusionsterm durch den Ansatz $-N_i/\tau_e(i)$ ersetzt, mit der Entkommzeit $\tau_e(i)$. Betrachten Sie den Gleichgewichtszustand, d.h. $\partial N_i/\partial t = 0$. Nehmen Sie an, alle Isotope eines Elementes werden ausschließlich durch Spallation erzeugt, die Produktionsrate für Isotop i ist gegeben durch

$$C_i = \sum_{j>i} \frac{p_{ij}}{\tau_j} N_j$$

und vernachläßigen Sie den Energiegewinn/Verlust der Teilchen. Zeigen Sie, daß für nichtradioaktive Isotope

$$-\frac{N_i}{\tau_e(i)} + C_i - \frac{N_i}{\tau_{spal}(i)} = 0$$

und für radioaktive Isotope mit Zerfallszeit $\tau_r(j)$

$$-\frac{N_j}{\tau_e(j)} + C_j - \frac{N_j}{\tau_{spal}(j)} - \frac{N_j}{\tau_r(j)} = 0$$

gilt. Nehmen Sie $\tau_{spal} >> \tau_e$ und $\tau_{spal} >> \tau_r$ an und geben Sie das Verhältnis eines radioaktiven zu einem nichtradioaktiven Isotop N_j/N_i im Gleichgewichtszustand an.

Aufgabe 10 Alter der kosmischen Strahlung

Das Verhältnis der beiden Beryllium Isotope ^{7}Be (stabil) und ^{10}Be (radioaktiv, $\tau_r(^{10}\mathrm{Be}) = \gamma\tau_0 = 3.9 \cdot 10^6$ a) in der kosmischen Strahlung ist gegeben durch

$$\frac{N(^{10}\mathrm{Be})}{N(^7\mathrm{Be})} = \frac{\frac{1}{\tau_e(^7\mathrm{Be})}}{\frac{1}{\tau_e(^{10}\mathrm{Be})} + \frac{1}{\tau_r(^{10}\mathrm{Be})}} \frac{C(^{10}\mathrm{Be})}{C(^7\mathrm{Be})}$$

(vgl. Aufgabe 9). Das Verhältnis der Produktionsraten ergibt sich aus den entsprechenden Wirkungsquerschnitten zu $C(^7\mathrm{Be})/C(^{10}\mathrm{Be}) = 6.66$. In der kosmischen Strahlung wurde das Verhältnis $N(^{10}\mathrm{Be})/N(^7\mathrm{Be}) = 0.028$ gemessen. Nehmen Sie $\tau_e = \tau_e(^7\mathrm{Be}) = \tau_e(^{10}\mathrm{Be})$ an und berechnen Sie die Verweildauer τ_e der kosmischen Strahlung in der Galaxis.

Aufgabe 11 Durchquerte Materie der kosmischen Strahlung

Gehen Sie von der Transportgleichung in Aufgabe 9 aus und vernachlässigen Sie Diffusion sowie Energie-Gewinne und -Verluste während des Transports. Nehmen Sie an, die leichten Elemente Li, Be, B (L-Gruppe) entstehen ausschließlich durch Spallation der Elemente C, N, O (M-Gruppe). Es sei $\xi = \rho\ x = \rho\ v\ t$ die Weglänge der Teilchen der kosmischen Strahlung [g/cm^2], mit der Geschwindigkeit v der Teilchen und der Dichte ρ des interstellaren Mediums.

Zeigen Sie, das für die Transportgleichung der leichten Teilchen

$$\frac{dN_L(\xi)}{d\xi} = -\frac{N_L(\xi)}{\xi_L} + \frac{P_{ML}}{\xi_M} N_M(\xi)$$

und für die Teilchen der CNO-Gruppe

$$\frac{dN_M(\xi)}{d\xi} = -\frac{N_M(\xi)}{\xi_M}$$

gilt. Die mittlere freie Weglänge für die Kollision mit Wasserstoffkernen des interstellaren Mediums ist $\xi_L = 8.4$ g/cm^2 für die L-Gruppe und $\xi_M = 6$ g/cm^2 für die M-Gruppe. $P_{ML} = 0.28$ ist die mittlere Fragmentationswahrscheinlichkeit für Kerne der M-Gruppe.

Leiten Sie hieraus die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^{\frac{\xi}{\xi_L}} N_L(\xi)\right] = \frac{P_{ML}}{\xi_M} \exp\left(\frac{\xi}{\xi_L} - \frac{\xi}{\xi_M}\right) N_M(0)$$

her und zeigen Sie, daß

$$\frac{N_L(\xi)}{N_M(\xi)} = \frac{P_{ML}\xi_L}{\xi_L - \xi_M}\left[\exp\left(\frac{\xi}{\xi_M} - \frac{\xi}{\xi_L}\right) - 1\right]$$

eine Lösung dieser Gleichung ist.

Messungen der Elementhäufigkeiten in der kosmischen Strahlung ergeben $N_L(\xi)/N_M(\xi) = 0.25$. Berechnen Sie, wieviel Materie ξ [g/cm^2] die kosmische Strahlung auf ihrem Weg zum Beobachter durchquert hat.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 20. Dezember 2005 im **Seminarraum 6/1** besprochen.
Informationen zu den Übungen: http://www-ik.fzk.de/~joerg/uebungen.html.