Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Experimentelle Kernphysik

Prof. Dr. W. de Boer
Priv. Doz. Dr. J. Hörandel
Dr. M. Roth

Übungen zur Einführung in die Kosmologie — WS 2005/06
3. Aufgabenblatt

1. Berechnen Sie den Umfang U einer Hyperkugel, d.h. einer Kugel in einem gekrümmten Raum, mit Eigenradius a in einem dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung K. Die Metrik eines Raumes mit konstanter Krümmung K ist in Polarkoodrinaten r, θ, ϕ:

$$\Delta s^2 = \frac{\Delta r^2}{1 - Kr^2} + r^2 \Delta\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \Delta\phi^2$$

2. Zeigen Sie, daß die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck, d.h. einem Dreieck auf einer Kugeloberfläche, zwischen 180° und 900° liegt.

3. Ein kugelförmiger (Radius r) schwarzer Satellit fliegt mit dem Abstand d um die Sonne. Die Sonne strahlt wie ein Schwarzkörper bei 6000 K. Der Satellit sieht die Sonne unter einem Winkel $\theta \ll 1$. Leiten Sie einen Ausdruck für die Gleichgewichts-Temperatur des Satelliten in Abhängigkeit von θ her.

4. Wie ändert sich das Schwarzkörperspektrum

$$n(\omega, T) d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

   bei einer Expansion des Raumes? Bei der Ausdehnung wird die Frequenz rotverschoben, gemäß

$$\omega_0 = \frac{\omega}{1+z}.$$

   Wie lautet das differentielle Energiespektrum für die Schwarzkörperstrahlung?

   Durch Integration des Energiespektrums erhalten Sie die Energiedichte der Reliktphotonen aus dem Urknall. Berechnen Sie den Anteil Ω_γ den die 3-K Photonen ($T = 2.73$ K) zur Gesamtenergiedichte des Universums beitragen. Die kritische Dichte ist gegeben durch

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.1 \cdot 10^4 h^2 \mathrm{eV/cm}^3.$$

   Hinweis: Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^4}{15} \text{ und } \xi = \frac{\hbar\omega}{k_b T}$$

   sowie $k_B = 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K und $\hbar c = 197.326$ MeV fm.

Achtung: Die Übungen am 13. Dezember finden ausnahmsweise im Raum F2-16 statt!
Informationen zu den Übungen unter http://www-ik.fzk.de/~joerg/kosmologie.html.