Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Experimentelle Kernphysik

Prof. Dr. W. de Boer
Priv. Doz. Dr. J. Hörandel
Dr. M. Roth

Übungen zur Einführung in die Kosmologie — WS 2005/06
6. Aufgabenblatt

1. Berechnen Sie die Jeanslänge zum Zeitpunkt der Bildung der ersten Galaxien $t_G = 600 \cdot 10^6$ a.

   Berechnen Sie zunächst die Temperatur T_G zu diesem Zeitpunkt. Materie und Strahlung haben zur Zeit $t_e = 380 \cdot 10^3$ a ($T_e = 3000$ K) entkoppelt. Für Materie gilt $T \propto S^{-2}$.

   Für die Schallgeschwindigkeit gilt $v_s = \sqrt{5kT/(3m_p)}$. Mit der Boltzmannkonstanten $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K und der Protonenmasse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

   Die Jeanslänge berechnet sich zu $\lambda_J = v_s/\sqrt{G\rho}$ mit der Newtonschen Gravitationskonstanten $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2). (1 pc=$3.1 \cdot 10^{16}$ m)

   ρ ist die Materiedichte zum Zeitpunkt der Galaxienbildung ($Z = 20$). Heute gilt $\rho_c = 5390$ eV/cm^3 und $\Omega_m = 0.04$.

2. Zeigen Sie, daß bei adiabatischer Expansion, d.h. $\dot{s} = 0$ und

   $$ds = \frac{1}{kt}(d(\epsilon V) + pdV)$$

   die Beziehung

   $$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}g_{eff}\frac{VaT^3}{k}\right) = 0$$

   gilt.

   Elektronen und Positronen verschwinden unterhalb von 0.2 MeV durch Annihilation und Zerstrahlung. Zu dieser Zeit erhöht sich die Temperatur der Photonen als Konsequenz der Entropieerhaltung. Berechnen Sie den Faktor der Temperaturerhöhung.

3. Rate für den Nachweis von WIMPs

   (a) Schätzen Sie die erwartete Rate der WIMPs in einem Detektor der Masse 1 kg ab. Benutzen Sie folgende Annahmen: Die Effizienz des Detektors sei $\epsilon = 0.7$. Die Masse der WIMPs sei $M = 100$ GeV und ihre Wechselwirkung mit Materie ist gegeben durch die schwache Wechselwirkung mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma = G_F^2 M^2 A^2$. Die Fermikonstante sei $G_F = 10^{-5}$ GeV^{-2} und A die Massenzahl von Germanium.

   (b) Begründen Sie, warum man für die berechnete Rate eine halbjährliche Modulation erwartet.

bitte wenden!

4. Anzahl der Neutrinogenerationen
   Am LEP–Speicherring bei CERN werden Z^0-Bosonen bei der Annihilation von Elektronen und Positronen bei einer Schwerpunktsenergie von 91 GeV erzeugt, die dann in Fermionen zerfallen gemäß $e^-e^+ \rightarrow Z^0 \rightarrow f\bar{f}$. Verifizieren Sie mit den folgenden Meßergebnissen des DELPHI-Experiments die Aussage, dass es genau drei Sorten leichter Neutrinos (mit $m_\nu < m_{Z^0}/2$) gibt. Die Vermessung der Resonanzkurve ergab $\sigma_{had}^{max} = 41.45 \pm 0.31\,\text{nb}$, $\Gamma_{had} = 1738 \pm 12\,\text{MeV}$, $\Gamma_l = 83.27 \pm 0.50\,\text{MeV}$, $M_Z = 91.182 \pm 0.009\,\text{GeV/c}^2$ und $\Gamma_\nu/\Gamma_l = 1.99$. Hier sind alle Quarkendzustände in einer Breite Γ_{had} zusammengefasst, und Γ_l ist die Zerfallsbreite des Z^0 in (einzelne) Leptonen. Die Resonanzkurve wird durch die, aus der Kernphysikvorlesung bekannte, Breit–Wigner–Formel beschrieben:

   $$\sigma_{e^-e^+\rightarrow Z^0\rightarrow f\bar{f}}(s) = 12\pi(\hbar c)^2 \cdot \frac{\Gamma_e \cdot \Gamma_f}{(s - m_Z^2c^4)^2 + m_Z^2c^4\Gamma_{tot}^2}$$

   Diese beschreibt den Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$.

   Leiten Sie den maximalen Wirkungsquerschnitt σ_{had}^{max} für hadronische Endzustände her.

   Leiten Sie eine Formel für die Anzahl der Neutrinosorten N_ν her und berechnen Sie N_ν.

   Schätzen Sie den Fehler von N_ν aus den Meßfehlern ab.

   Hinweis: Die gesamte Breite Γ_{tot} des Z^0 läßt sich darstellen als

   $$\Gamma_{tot} = \Gamma_{had} + 3\Gamma_l + N_\nu\Gamma_\nu$$

   und es gilt $\hbar = 197$ MeV fm/c, $c = 1$ und $\Gamma_{tot} = \Gamma_Z$.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 7. Februar 2006 um 14:00 Uhr im Seminarraum 6/1 besprochen.
Informationen zu den Übungen unter http://www-ik.fzk.de/~joerg/kosmologie.html.