



Newtonian Cosmology – 2011/12

Werkcollege 6 – 08.06.2012

Verwijzingen naar het boek van Liddle worden met [$\mathcal{L}$ "sectie"] aangegeven.

5.1 De Jeansmassa [$\mathcal{L}$ 9]

Beschouw een homogene wolk met totale equivalente massa in een bol met straal r gelijk aan M_r^{tot} en een isotrope druk van de baryonen van p_b . Voor de baryonen in de wolk geldt dat zij onder invloed van de zwaartekracht zullen samentrekken mits

$$-\frac{dp_b}{dr} < \frac{GM_r^{\text{tot}}\rho_b}{r^2}. \quad (1)$$

Opgave 1:

Ga bovenstaande formule na en interpreteer de termen.

Opgave 2:

Laat zien dat de wolk ruwweg zal instorten als de baryonmassa, $M_b \equiv \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_b$,

$$M_b \geq M_J \equiv \frac{9\rho_b c_s^3}{2\pi^{\frac{1}{2}}\rho_{\text{tot}}^{\frac{3}{2}}G^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

waarin we hebben gebruikt:

$$p_b \simeq \rho_b c_s^2, \quad (3)$$

$$M_{\text{tot}} = M_r^{\text{tot}} = \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{tot}}r^3, \quad (4)$$

met c_s de geluidssnelheid binnen de wolk.

Opgave 3:

Laat zien dat vóór ontkoppeling ¹ geldt:

$$M_J \propto T^{-3}. \quad (5)$$

Hint: gebruik dat

$$\rho_b \propto a^{-3} \propto T^3, \quad (6)$$

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_b + \rho_\gamma \simeq \rho_\gamma \propto a^{-4} \propto T^4, \quad (7)$$

¹Het moment van ontkoppeling tussen straling en materie wordt hier voor de eenvoud gelijk gesteld aan het moment waarop stralingsdominantie in materiedominantie overgaat

en

$$p_{\text{tot}} \simeq \frac{1}{3} \rho_{\text{tot}} c^2 \text{ zodat } c_s = c/\sqrt{3}. \quad (8)$$

Opgave 4:

Laat zien dat ná ont koppeling geldt:

$$M_J \propto T^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

Hint: gebruik voor het (een-atomige) baryongas de ideale gaswet $p = nk_B T$ en de energiedrukking

$$E = \frac{3}{2} n k_B T V \quad (10)$$

en verder

$$\rho_{\text{tot}} \simeq \rho_b \quad (11)$$

en

$$c_s \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad (12)$$

met m de gemiddelde deeltjesmassa. Let op, de temperatuur van het baryonengas is na ont koppeling niet hetzelfde als de fotonentemperatuur.

Opgave 5:

Bereken de factor waarmee M_J verspringt op het moment van ont koppeling ($T \simeq 3000$ K).

5.2 De Kosmologische constante [$\mathcal{L}$ 7]

Opgave 6:

Laat zien dat als aan de bol in opgave 1 van werkcollege 2 effectief een energieterm wordt toegevoegd ter grootte

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{3} \right) m r^2 \quad (13)$$

de Friedmannvergelijking met kosmologische constante gelijk wordt aan

$$-\frac{1}{3} \Lambda + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} = \frac{2U}{m a^2} \equiv -\frac{k}{a^2}. \quad (14)$$

Merk op dat k nu iets anders gedefinieerd is dan in werkcollege 2: het scheelt een factor c^2 .

Met de kritische dichtheid

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (15)$$

en de Hubble parameter

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (16)$$

kan de Friedmannvergelijking worden geschreven als:

$$-\frac{\Lambda}{8\pi G\rho_c} + 1 - \frac{\rho}{\rho_c} = -\frac{k}{H^2 a^2} \quad (17)$$

ofwel

$$-\Omega_\Lambda + 1 - \Omega_M = -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (18)$$

Opgave 7:

Welke termen in 14 worden dominant voor grote a ?

Opgave 8:

Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking in deze limiet.

De oplossingen zullen worden besproken tijdens de werkcollege op 08.06.2012 vanaf 10:30 in HG01.057 en HG01.139.

College webpagina: <http://particle.astro.ru.nl/goto.html?cosmology1112>